шинстве случаев рассматривается приближение, когда величины J^{α}_{ij} отличны от нуля, лишь если узлы i и j являются ближайшими соседями и $J^{\alpha}_{ij} = J^{\alpha}$. Отношение $\xi = J^{\perp}/J^{\parallel}$ наз. константой межионной магн. анизотропии. В более общем случае С. г. включает члены, описывающие одноионную анизотропию [см. третье слагаемое в (1)]. При $|\xi| < 1$ С. г. (4) описывает (анти)ферромагнетик типа «лёгкая ось», при $|\xi| > 1$ — типа «лёгкая плоскость».

В более высоких порядках теории возмущений к билинейному по спиновым операторам С. г. (4) могут добавляться т. н. негейзенберговские взаимодействия, напр. полилинейные формы вида $\sum\limits_{i,j,k...} A^{\alpha\beta\gamma...}_{ijk...} S^{\alpha}_i S^{\beta}_j S^{\gamma}_k \ldots$ (здесь $A^{\alpha\beta\gamma...}_{ijk...}$ — численные коэф.), называемые многоспиновыми взаимодействиями и существенные, напр., для описания спиновой системы *квантового кристалла* He^3. В случае спина $S \geqslant 1$ возможны также негейзенберговские слагаемые вида $\sum\limits_{ij} A^{(n)}_{ij} (S_i S_j)^n$, содержащие все независимые спиновые инварианты до порядка $2S$ включительно [Э. Шрёдингер (E. Schröedinger), 1940)]. Напр., при $S = 1$ это даёт биквадратный обмен.

Обобщение С. г. (4), учитывающее *спин-фононное взаимодействие* в магнетике, возможно на основе кривой Слэтера, описывающей изменение обменных констант при смещениях ПМИ из своих равновесных положений. Др. обобщение С. г. (4) возможно, если при разбиении магнетика на две или более магн. подрешётки обменные константы $J^{\alpha\beta}_{ij}$ могут иметь разл. величины и знаки внутри и между подрешётками (напр., в простом антиферромагнетике $J_{ij} < 0$ между подрешётками, тогда как $J_{ij} > 0$ внутри подрешёток). Величины $J^{\alpha\beta}_{ij}$ могут быть анизотропны не только в спиновом (по индексам α, β), но и в координатном (по индексам i, j) пространстве (см. *Слоистые магнетики*). В примесных или неупорядоченных магнетиках обменные константы могут быть случайно распределёнными величинами (см. *Спиновое стекло*). При теоретич. расчётах иногда удобно использовать вместо исходных решёточных (дискретных) С. г. (3) и (4) их континуальный (непрерывный) аналог; для этого вводится зависящий от времени t оператор плотности магн. момента $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},t) = -g\mu_{\text{Б}}\sum\limits_i \boldsymbol{S}_i\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)$, $\delta(\boldsymbol{r})$ — *дельта-функция*, $\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{S}_i(t)$, $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(t)$, к-рый затем усредняется по физически бесконечно малому объёму [Ч. Херринг, Ч. Киттель (C. Herring, C. Kittel), 1951]. В результате возникает плотность макроскопич. магн. момента $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},t)$, через к-рую (вместе с её производными) выражаются обычно квазиклассич. феноменологич. С. г., получаемые в виде разложений по магн. инвариантам данной решётки.

Квазиспиновый гамильтониан. Использование КСГ прежде всего связано с относит. простотой и низкой размерностью $m = 2S+1$ алгебры $SU(m)$ спиновых операторов. Для С. г. (КСГ) хорошо разработаны теоретич. методы вычислений, в т. ч. квазиклассич. метод приближённого *вторичного квантования*, вариационные и функциональные методы, методы двухвременных и причинных *Грина функций*, разл. варианты диаграммной техники. Применение КСГ особенно удобно в тех случаях, когда система обладает небольшим числом $2S+1$ (S — квантовое число квазиспина) разл. квантовых состояний, к-рые описываются собств. значениями оператора продольной компоненты оператора квазиспина S^z (от $-S$ до S) или оператора числа спиновых отклонений $n = S - S^z$ (от 0 до $2S$). Операторы поперечных компонент квазиспина $S^{\pm} = S^x \pm iS^y$ играют роль операторов рождения и уничтожения квазиспиновых отклонений в S^z-представлении и переводят систему из одного состояния в другое. Для наиб. распространённого случая двухуровневой системы ($S = 1/2$) квазиспиновые операторы $S^{\pm}$ и S^z точно совпадают с паули-операторами, коммутирующими подобно бозе-операторам для разл. состояний ($i \neq j$) и антикоммутирующими подобно ферми-операторам для совпадающих состояний ($i = j$).

В методе КСГ пространство состояний системы является конечномерным, а энергетич. спектр — ограниченным (хотя и не обязательно дискретным). Определ. трудности связаны с кинематич. свойствами спиновых операторов (условием нормировки и т. п.), а также с необходимостью использования обобщённой квантовой статистики с макс. числом заполнения $2S$ (случай $S = 1/2$ соответствует *Ферми — Дирака статистике*, $S \to \infty$ — *Бозе — Эйнштейна статистике*). Физически возможность введения квазиспинового описания в реальных системах мн. ферми- или (реже) бозе-частиц обусловлена особенностями структуры гамильтониана взаимодействия и пространства собств. ф-ций, позволяющими полностью исключить одночастичные ферми- или бозе-операторы и ввести с их помощью операторы квазиспина или паули-операторы. При вычислениях на основе КСГ также возможно использование соответствующих квазибозонных или квазифермионных представлений спиновых операторов.

Характерные примеры применения метода КСГ: 1) энергия ПМИ в немагн. окружении в случае, когда его основным орбитальным состоянием является не синглет, а вырожденный дублет, описывается вместо (1) эффективным КСГ вида

$$\mathscr{H} = 2\mu_{\text{Б}} H^{\alpha} S^{\alpha} + \mu_{\text{Б}} H^z \sigma^z + \lambda S^z \sigma^z, \qquad (5)$$

где S^z — оператор z-компоненты обычного спина ПМИ, σ^z — оператор z-компоненты квазиспина ($\sigma = 1/2$), действующий в двумерном пространстве волновых ф-ций вырожденного орбитального дублета.

2) Зарядово-независимое (изотопически инвариантное) взаимодействие в системе нуклонов описывается КСГ вида (3) с заменой $\boldsymbol{S}_i$ на $\boldsymbol{\tau}_i$, где $\boldsymbol{\tau}_i$ — оператор *изотопического спина* (В. Гейзенберг, 1932), действующий в пространстве волновых ф-ций протона и нейтрона. В J_{ij} входят как истинное обменное взаимодействие вида (3), обусловленное фермионной природой нуклонов, так и другие зависящие от спина (т. н. тензорные) взаимодействия (см. *Ядерные силы*).

3) Энергия (анти)сегнетоэлектрика с водородной связью (напр., KH_2PO_4 или $NaNO_2$), обнаруживающего *структурный фазовый переход*, описывается частным случаем КСГ вида (4) — моделью Изинга в поперечном «поле» [П. де Жен (P. de Gennes), 1963]. Роль внеш. поля играет интеграл туннелирования Ω протона между двумя симметричными минимумами («ямами») одночастичного потенциала. Операторы квазиспина для $S = 1/2$ определены в двумерном пространстве симметричных и антисимметричных по «ямам» волновых ф-ций, описывающих расщепление осн. состояния на дублет с энергиями соответственно $\mathscr{E}_+$ и $\mathscr{E}_-$ ($\mathscr{E}_- > \mathscr{E}_+$, причём $\Omega \approx \mathscr{E}_- - \mathscr{E}_+ > 0$).

4) Энергия сверхпроводника в простейшем варианте *Бардина — Купера — Шриффера модели* может быть представлена в виде частного случая КСГ (4) — поперечной, или XY-модели [П. Андерсон (P. Anderson), 1958]. Роль обменного интеграла играет матричный элемент взаимодействия притяжения между куперовскими парами (см. *Купера эффект*), а роль операторов квазиспина — операторы рождения, уничтожения и числа этих пар. Свойство «фермиевости» квазиспиновых операторов для $S = 1/2$ в одном импульсном состоянии отражает требование принципа Паули.

5) Энергия решёточного квантового неидеального бозе-газа (напр., состоящего из атомов He^4), проявляю-